АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
ТРУДЫ XXIV и XXV НАУЧНЫХ КОНФЕРЕНЦИЙ
АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ СПЕЦИАЛИСТОВ
Секция истории физики, Москва, 1982–1983 гг.

С.И. Сухонос

СИСТЕМНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Системный и исторический подходы обычно противопоставляются. По нашему мнению, причиной этого является их взаимная неполнота: если историческому подходу недостает четких правил систематизации событий, то системному — умения оперировать с изменяющимися системами. Напрашивается вывод о необходимости взаимного дополнения этих подходов.

Если задаться вопросом, чем диктуется историческая. последовательность развития науки, не зависящая, как нам кажется, от произвола личности исследователя, то можно попытаться ответить на него, смоделировав идеализированную ситуацию накопления и систематизации знания о каком-либо множестве объектов 0_i. На первом этапе обычно неупорядоченно накапливаются данные (Data Base),затем происходит их постепенное упорядочивание, детализация и систематизация. В ходе этого процесса, естественно, происходит возрастание степени взаимосвязанности внутри DB, появляется возможность экстра- и интерполяций и в итоге создается научная картина исследуемой области природы. То есть идет систематизация, DB → DS. Мы считаем возможным логику этого процесса рассматривать независимо от конкретного наполнения DB, полагая, что существует общий для всех систем алгоритм развития. Данная работа посвящена на рассмотрению одного из вариантов такого алгоритма.

1. Минимальный набор компонентов системы

В настоящее время общепризнанной общей теории систем нет. Даже центральное понятие — понятие системы, насчитывает около 30 вариантов [l]. При этом, проблема четкой дефиниции выходит далеко за рамки энциклопедической — минимальный набор понятий, который ее образует, должен обладать целостностью, иначе научная картина получается фрагментарной. Поэтому рассмотрим проблему дефиниции более подробно.

В той же работе [1] А.И. Уемов показал, что все 30 определений сводимы к 2 основным: его и Ю.А. Урманцева [2]. По А.И. Уемову система — это множество элементов объектов, которые обладают заранее определенными свойствами с фиксированными отношениями (или: множество элементов, на которых реализуется определенное отношение с фиксированными свойствами). Определение Ю.А. Урманцева содержит те же общие компоненты: объекты, отношения и свойства, но кроме них — четвертый — композицию, излишний по мнению А.И. Уемова. По нашему мнению, композиция далеко не излишний придаток, так как ее разнообразие отражает изменчивость внутри системы.[1] В общем же, оба определения видятся нам взаимодог полнящими вот почему. 1) Любой природный объект имеет внутреннее (In) и внешнее пространство (Out); внешнее пространство в общем случае характеризуется композицией элементов (composition); а внутреннее — их свойствами (attribute); при диалектическом подходе необходимо обязательно учитывать движение, движение во внешнем пространстве, — перемещение (movement), а во внутреннем — изменчивость (variability). Таким образом статические компоненты (Stat) и динамические (Din) образуют цельную группу наиболее общего порядка расслоения системы S_1.

2) Этот же набор можно получить другим путем. Главное отличительное понятие системы — целостность, предполагает: 1) наличие множества элементов — E_i , так как хотя один элемент без внутренней структуры безусловно целостен, но-при $|E_i| = 1$ мы имеем вырожденный случай (а кроме того, бесструктурный элемент в природе — все еще лишь абстракция [3]; 2) коллективную реакцию на воздействие (невзаимодействующие элементы — лишь потенциально целостное образование), ведущее к перераспределению движения внутри E_i на порции, образующие множество движений M_i. 3) нетождественность свойств элементов E_i (как минимум потому, что они занимают различное положение относительно ее границ) ведет к невырожденному множеству свойств, цветов — C_1; 4) цвета меняются под воздействием на E_i бесспорно различно, что ведет к невырожденному множеству изменений — V_i. Так как изменения ведут к смене базы элементов, $E_i \rightarrow E_{i+1}$, и таким образом система постоянно сама себе нетождественна, то на практике мы довольствуемся интервалом вариаций в C_1, что позволяет выделять в природе однотипные в пространстве и времени системы, характеризуемые набором 4 множеств $S_i = (E_i, M_i, C_i, V_i)$. Полученный цикл множеств лишь терминологически, в общем-то, отличается от разбиения на компоненты CAMV. Анализ показывает, что при других подходах мы приходим к тому же циклу [4].

3) Здесь можно было бы показать, как актуализация в этом наборе того или иного аспекта S_i дает все разнообразие дефиниций. Но так как только перестановки допускают $C_4^4 = 24$ варианта, мы приведем здесь лишь один из простейших вариантов: система — это целостное множество элементов, которые находятся в непрерывном движении и обладают свойствами, изменяющимися во времени. Причем, мы вообще снимаем проблему единственности дефиниции S_i требуя лишь наличия основных четырех компонентов и соответствия их расстановки требованиям конкретной ситуации (тем самым мы вводим изменчивость и в процесс определения системы). Алгоритм расслоения S_i, приводящий к 4 компонентам, как показал наш анализ, настолько универсален, что мы обозначили его «системным ключей» и последовательность GAMV заменили обозначением Sk^n, где n — порядковый номер в последовательности компонентов. Однако, расслоение по Sk^n лишь подготавливает почву для перехода к DS, так как внутри любого из 4-х множеств есть естественная иерархия взаимосвязей, например, в M_i — движение по спирали — наиболее общий вид движения [5]. В общем-то очевидно, что усложнение DB должно сопровождаться наращиванием удельной взаимосвязи — k^1 (количество связей, приходящихся на один элемент системы). Однако, чтобы этому качественному утверждению придать количественную трактовку, мы опираемся на следующую гипотезу: история развития модели геометрического пространства отражает логику развития взаимосвязей в системе данных.

2. Системный аспект истории развития модели пространства

Обзор исследований, посвященных развитию пространственных представлений [6], показал специфику развития двух концепций пространства: абсолютного

(Ньютона) и относительного (Лейбница–Канта–Эйнштейна). Уже у Канта дано ясное определение второй концепции: «...без ... силы нет никакой связи, без связи — никакого порядка и, наконец, без порядка нет никакого пространства...» [7, с. 71]. В рамках такого подхода любые типы связанности можно рассматривать через пространственную призму или, говоря иначе, внепространственных систем не существует. Но с другой стороны мы постараемся показать, что не существует и внесистемных моделей пространства. Проанализируем для этого основные черты развития пространственных представлений.

Бесспорно, что в античной математике высказывались отдельные гениальные догадки о сущности пространства. Однако, об общем уровне науки любого периода естественнее судить не по догадкам и отвергнутым гипотезам, а по общепризнанным трудам, подводящим итог накопленного за этот период опыта. Вся геометрия древнего мира сконцентрировалась в началах Евклида (330–275 гг. до н.э.). А этот труд в основном посвящен плоскому пространству (E^2). В него не вошли уже известные тогда конические сечения; между длинами, площадями и объемами были определены лишь степенные соотношения; теория перспективы была вообще изложена отдельно в «Оптике». «У Евклида совершенно не выявляются стереометрические аналоги планиметрических объектов и теорем» и он «никогда не составлял из точек линии, из линий поверхности, из поверхностей тела» [8, с. 164, 183]. Тщательный анализ «Начал» и античной математики позволил Д.Д. Мордухай-Болтовскому сделать заключение о том, что, хотя характеристика тела длиной, шириной и глубиной идут от Платона и Аристотеля, «отвлеченное пространство еще не мыслилось античными математиками». Отдельные определения E^3 встречались у многих мыслителей древности, «но находится ли у них указание на трехмерное пространство? — Думаю, что нет. В античное время нашего понятия пространства не существовало...» [8, с. 164]» К этому можно добавить и то, что первые попытки использования перспективы (E^3) относятся лишь к VI в. до н.э., когда прикладная геометрия (E^2) уже имела длительную предысторию.

В средневековом развитии геометрии на Востоке разрабатывались лишь начала плоской тригонометрии и не менялась модель пространства времен Евклида [9, с. 34].

Д.Д. Мордухай-Болтовский считает, что понятие о E^3 как о трех координатах идет даже не с Декарта, а с Канта и Эйлера, «когда рядом с ними встает и четырехмерное — не воображаемое, а только мыслимое — пространство» [8, с. 163]. В общем присоединяясь к этому выводу, добавим более детальный анализ отдельных моментов становления E^3.

Насколько нам известно, впервые E^3-модель в неявной еще форме появилась у Кеплера. Он ввел «три пересекающихся накрест диаметра» [10, с. 23], как своеобразную квинтэссенцию свойств E^2- и E^3-упаковок шаров. Однако в явном виде эта модель была предложена лишь Ньютоном [11–12]. Начав с точки, как с E^o, он придал ей движение и получил линию E^1. Параллельным переносом линии задал плоскость E^2. Параллельным переносом плоскости — объем E^3.

В 1844 г. Г. Грассман предложил другой способ построения модели E^n. E^o он также задал точкой, но ньютоновские движения заменил связями между точками, E^1 он задал двумя связанными точками, E^2 — тремя, не лежащими на одной прямой и E^3 — четырьмя, не лежащими в одной плоскости [13–14].

Сравнивая эти способы, мы пришли к выводу об их системно экстримизированном различии. Ведь точки принадлежат E_1, связи и движения — M_i, различие типов элементов (у Ньютона — точек, линий..., у Г.Грассмана — точек с различным числом связей) — C_i, и, наконец, переходы между разномерными моделями —

V_i. В принципе же различие способов сводимо к количественному различию используемых элементов и связей. Если у Ньютона их множество не определено, взят максимальный предел — качественный способ построения, то у Грассмана их предельно мало, и его способ принципиально фундаментален. Тривиальная системная интерпретация элементов как компонентов статики, а связей — динамики, раскрывает нам системную сущность исторически сложившихся способов построения пространства: для рассмотренных случаев — это экстримизированное расслоение по (Stat-Din)-признаку. И тогда комбинаторика позволяет формализовать еще 2 варианта экстремальных сочетаний (табл. 1). C_m^3 — способ, построения с максимальным соотношением элементов на одну связь. Геометрическим примером E^2 C_m^3 является шестиугольная сетка (рис. 1а), (для простоты здесь и далее мы будем рассматривать лишь симметричные варианты). Для C^3 этот способ построения впервые, насколько нам известно, был рассмотрен в 1930-х гг. Д. Гильбертом и С. Кон-Фоссеном [5] в задаче о наименее плотной упаковке шаров. Системная интерпретация C_m^3 — предельная экстенсивность построения любого пространства, его статический «захват». C_m^4 — способ построения обратный C_m^3 (рис. 2в).

Таблица 1

Способы построения моделей пространства

Количество элементов, $N_{ЭЛ}$	Количество связей, N_{CB}	
	max	min
max	Cm^1 — И. Ньютона максимизированный, качественный	Cm^3 — Д. Гильберта экстенсивный, наращивание элементов
min	Cm^4 — И. Кеплера интенсивный, наращивание связей	Cm^2 — Г. Грассмана минимизированный, принципиальный

Геометрически этот способ обеспечивает наиболее плотную упаковку пространства и был исследован еще И. Кеплером [10], но окончательно он сложился, видимо, гораздо позже в период становления кристаллографии. Системная интерпретация Cm^3 — предельная интенсивность построения, которую модно, рассматривать, как развитие уже построенного по Cm^3 пространства.

Так как к одному и тому же E^n можно прийти 4 различными способами, то можно записать — $E^n = \{Cm^3\}$. Таким образом анализ показал системное различие исторически сложившихся способов построения пространства. И тогда применение Sk^n позволяет произвести еще одно расслоение по (1-0)-признаку. Экстримизация, аналогичная, предыдущей, дает 4 способа заполнения пространства (табл. 2). Очевидно, $Cm^n = \{Fm^n\}$.

Способы заполнения исторически исследованы нами пока предварительно, что не позволяет даже приближенно приписывать им авторство. В качестве примера различия возьмем $E^3Cm^3Fm^3$ и $E^3Cm^3Fm^1$, геометрические модели которых отличаются: как кристаллическая решетка и ее аналог, в котором в узлах решетки расположены соприкасающиеся шары — в первом случае элементы не имеют внутреннего пространства и образуют внешнее, а во втором — внутреннее пространство элементов и образуемое ими внешнее пространство находятся в равновесии.

Таблица 2

Способы заполнения моделей пространства (Filling methods)

Внешнее пространство, Out	Внутреннее пространство, In	
	max	min
max	Fm^1 — …….. равновесный, насыщенный	Fm^3— …….. структурный, «решетчатый»
min	Fm^4— …….. внутренний, центристский	Fm^2— …….. точечный, сингулярный

Подводя предварительный итог, отметим, что наращивание размерности модели пространства возможно различными экстримизированными способами, образующими группы иерархии, подчиняющиеся системному принципу расслоения, однако, в настоящий момент нами найдены не все исторические аналоги потенциально возможных путей построения. Запишем расслоение в следующем виде

$$E^{n_o} = \{Cm^n = \{Fm^n = \{Sk^n\}\}\} \quad (1),$$

где n = 1, 2, 3, 4. Невольно возникает вопрос: а не является ли n_o квантованным по «4» параметром?

Так как общего способа построения пространства не существует, этот аспект необходимо рассматривать в рамках любого из Cm^n, Так как, согласно предыдущим рассуждениям, все способы равноценны, то выводы, полученные в рамках одного из них, если они относятся к метауровню (в данном случае к наращиванию размерности) инвариантны к.замене способа. В общем случае можно утверждать, что получение инвариантов невозможно без экстримизации, при этом выборе важнейших параметров для экстримизации обеспечивает понимание важнейших инвариантов системы.

В данной работе мы проведем анализ в рамках способа Г. Грассмана — Cm^2. Его системное «место» среди других способов характеризуется предельной минимизацией количества элементов и связей. Однако, сам Г. Грассман, выдвинув этот способ, не оттенил до конца его системных особенностей — условие минимизации формально неполно, что приводит к формальному произволу в выборе последующих точек и не исключает случаи вырождения (попадания 3-й точки на линию и т.п.). Для устранения этого недостатка необходимо минимальными условиями обеспечить автоматическое сохранение минимизации построения. Мы полагаем, что этим требованиям соответствует условие равенства связей. Нетрудно проверить, что оно полностью исключает случаи вырождения и одновременно является условием симметризации. Подчеркиваем, что это условие вводится не дополнительно, а скорее как детализация общего условия минимизации.

Итак, в этом случае для E° и E^1 все рассуждения остаются прежними, но E^2 уже задается равносторонним треугольником, а E^3 — равнореберным тетраэдром. Но уже для E^4 исходные требования частично не выполняются: 5-я точка, равноудаленная от четырех предшествующих — единственна, это центр тетраэдра, но расстояние от него до вершин короче, чем между вершинами. Далее. В рамках выбранных условий найти 6-ю точку, равноудаленную от пяти предыдущих, становится невозможным и E^5 не образуется.

Естественно, что можно задаться таким понятием расстояния, которое позволит построить n-мерную модель, с каким угодно количеством равноудаленных точек. Но даже если эти построения будут безукоризненны с математической точки зрения, «мы выбираем такую геометрию, аксиомы и теоремы которой лучше всего соответствуют условиям нашего существования, но этот выбор не является частью математического рассуждения» [15, с. 287]. Поскольку в огромной области практической деятельности мы пользуемся традиционным понятием расстояния, то уже поэтому полученный вывод о предельности наращивания размерности модели представляет интерес. Мы не вправе отмахиваться; от полученного вывода еще и потому, что принятые условия минимизации не нарушались при переходах от E^0 до E^3, а вот при переходе к E^4 частично нарушились и полностью запретили переход к E^5. По нашему мнению, предельность наращивания размерности не артефакт, а свидетельство особенностей типов связанности в реальном мире, отраженных в геометрии. И особенности эти, видимо, вытекают из причин, лежащих гораздо глубже геометрического уровня, тем более, что предельность $n_o = 4$ аналогична системной предельности $n = 4$.

Вернемся теперь к нашему построению и постараемся с «минимальными потерями» продолжить построение модели. Симметричное положение 5-й точки относительно 4-х вершин тетраэдра подобно симметричному положению описанной вод-руг нее сферы с $R \to \infty$. В то же время точка — это сфера нулевого измерения. Следовательно, формально, на бесконечности происходит свертка, минимальный и максимальный пределы сходятся [16] и $E^4 = E^0$. Образно же говоря, 4-симплекс мы сворачиваем в единичный элемент (точку «нового уровня») и начинаем все построения заново. Тогда $E^5 = E^1$, $E^6 = E^2$..., то есть $N = 4j + n$ (2), где N — некая суммарная размерность (от базисного уровня), j — порядковый номер рассматриваемого уровня организации, n =1, 2, 3, 4 = 0 — тип традиционной размерности, характеризующий j-й уровень и определяемый по формуле $n = 2N_{СВ}/N_{ЭЛ}$ (3). Разумеется, приведенные формулы относятся к простейшим случаям, а для всяких промежуточных и смешанных случаев требуется отдельное рассмотрение.

Приведем некоторые соображения в пользу о квантованности размерности.

1). Топологическое определение размерности по А. Лебегу [17], согласуется с определением размерности, которое можно было бы дать в рамках $E^nCm^3Fm^1$. Для этого надо сделать покрытия симметричными и в точки их контакта поместить шары единичного радиуса.

2). Для существующих способов определения размерности не вводится квантование. Например, геометры говорят о четырехмерном «пространстве прямых», где за координаты (X, У, Y_1, Z) прямой AB можно принять координаты точек A(X, Y) и B(Y_1, Z) ее пересечения с плоскостями XOY и YOZ [I8]. Но в этом случае понятие размерности низводится до понятия координаты (в общем случае, параметра), и полностью разрушается ее традиционное восприятие. В то же: время нам неизвестны строго обоснованные запреты на квантование размерности.

3). Полученный нами вывод справедлив и для Cm^nFm^1 способов, которые описывают упаковки элементов в пространстве. Но для упаковок свертка в элементы последующего уровня является фактором образования многоуровневой структуры, т.е. такого типа структур, который характерен для огромного числа природных систем. Между тем в неквантованном n-мерном пространстве для описания таких систем сверки приходится вводить искусственно.

И хотя доказать квантованность размерности пространства столь же трудно, как и его (3 + 1)-размерность [6], тем более, что мы не стремились здесь к чрезмерной строгости изложения, мы все-таки принимаем его в качестве рабочей гипотезы и утверждаем, что образование системы одного уровня организации происходит по формуле (1), где n_o=n.

3. Системная матрица

Итак, мы выделили некоторую иерархическую модель перехода от DB к DS. Эта модель дает 256 потенциальных этапа в наращивании сложности DS. Напомним, что комплексным критерием сложности мы выбрали k^1, так как он характеризует не только тип размерности и Cm, но зависит и от Fm, (рис. 2), косвенно характеризует степень динамичности пространства системы и т.п. Но каков оптимальный алгоритм развития DS? Можно ли его свести только к критерию возрастания одного параметра? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо модель построения DS представить в виде матрицы $(ECmFmSk)^4$, 256 ячеек которой будут соответствовать 256 этапам. Последовательность пути через эти ячейки будет представлять вариант логического развития DS. Тогда согласно принципу экстремальности должен осуществляться как максимальный путь через матрицу, так и минимальный, представляющий собой ее диагональ.

Предварительный анализ показал, что выделенные этапы характерны для исторического процесса любого масштаба, при этом максимальный путь — это реальная, петляющая история — след пути по всем возможным направлениям, в том числе и ретроспективным, и регрессивным. Этот путь обеспечивает заполненность и синтетическую целостность. Минимальный путь — это логически выпрямленная история, ее так называемая официальная версия. Но так как этот путь пролегает симметрично через всю матрицу, то он является результирующей для каждого конкретного значения n и на нем четко выделяются 4 узловых этапа симметричного построения матрицы: $E^1Cm^1Fm^1Sk^1 \rightarrow E^2Cm^2Fm^2Sk^2 \rightarrow E^3Cm^3Fm^3Sk^3 \rightarrow E^4Cm^4Fm^4Sk^4$. Каждый из этих 4 «кубиков» представляет собой наиболее устойчивую в силу своей идеальной, симметрии подсистему DS, характеризуемую синтетическим комплексом отличительных особенностей. Естественно, что в каждом из «кубиков» есть свои наиболее симметричные варианты и т.п. Все это позволяет чисто геометрически этапировать развитие DS.

Предварительный исторический анализ показал, что моделирование истории науки системной матрицей позволяет более глубоко воспринимать логику исторического процесса, который конечно же не укладывается полностью в описанные в данной работе закономерности. Однако мы надеемся, что найденный путь системного анализа истории имеет большие резервы внутреннего совершенствования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уемов А.И.* Системный подход и общая теория систем. М.: Мысль, 1978.
2. *Урманцев Ю.А.* Симметрия природы и природа симметрии. М.: Мысль, 1974.
3. *Марков М.А.* О природе материи. М.: Мысль, Наука, 1976.
4. *Сухонос СИ.* Определение понятия системы. — В сб.: «Кибернетика и проблемы управления научно-техническим прогрессом». Тез. докл. обл. науч.-практ. конф. Волгоград, 1982, с. 17–23.
5. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
6. *Горелик Г.Е.* Почему пространство трехмерно? М.: Наука, 1982.
7. *Кант И.* Сочинения. М.: Мысль, 1963.
8. *Мордухай-Болтовский Д.Д.* Коментарий к т. 3 Начал Евклида. М.–Л.: ГИТ–ТЛ, 1950.
9. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1978.
10. *Кеплер И.* Новогодний подарок, или о шестиугольных снежинках. — В кн.: *Кеплер И.* О шестиугольных снежинках. М.: Наука, 1982, с. 5–32.
11. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. (Пер. с прим. А.Н. Крылова). — Извест. Никол. Морск. Академии, 1915–1916, вып. IV.

12. БСЭ, 3-е изд-е. М.: Сов. энциклопедия, 1974, т. 18, с. 165.
13. *Штурм Р. и др.* Герман Грассман. — В кн.: *Бобынин В.В.* Биографии знаменитых математиков XIX столетия. М.: Изд-во ред. журн. «Физ.-матем. науки в их настоящем и прошедшем», 1886, вып. 1.
14. БСЭ, 2-е изд-е. М.: Сов. энциклопедия, 1952, т. 12, с. 452.
15. *Мэннинг Г.П.* Что такое четырехмерная геометрия? — В кн.: *Эббот Э.Э.* Флатландия, *Бюргер Д.* Сферландия. М.: Мир, 1976.
16. *Кузанский Николай.* Избр. философ. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1937.
17. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
18. *Яглом И.М.* Проблема тринадцати шаров. Киев: Вища школа, 1975.