ВНИИ АБРАЗИВОВ И ШЛИФОВАНИЯ
Деп. в ВНИИТЭМР 07.01.1986 № 29–86

С.И. Сухонос, В.Ф. Бердиков

УПАКОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОЗНИКНОВЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ОТДЕЛЬНОСТЕЙ

Ленинград 1986

В серии работ, результаты которых обобщены М.А. Садовским [1], выявлен ряд «преимущественных» размеров (рис. 1), свойственных отдельностям почвенного покрова и литосферы. Эти размеры проявляются в виде устойчивых мод в распределении частоты встречаемости отдельностей по размерам. Причем отдельности имеют самую разнообразную физико-химическую природу. Абсолютные значения размеров совершенно не зависят от способа выделения отдельностей, условий их формирования и т.п. Причем «физически реальны не сами отдельности „преимущественных“ размеров, а их распределение, сохраняющееся при любых масштабах», [1, с. 72]. Это явление свойственно чрезвычайно широкому интервалу масштабов — от 0,75 мкм до 4200 км. По оценке М.А. Садовского средний «шаг» между соседними «преимущественными» размерами (ПР) равен 3,5. Значения «шага» колеблются в пределах от 1,8 до 5,5, если, согласно [1], принять два резко выпадающих значения 14,0 и 14,7, приблизительно равными $3{,}8^2$ и считать, что в этих промежутках ПР выражены недостаточно явно, чтобы их можно было обнаружить.

Два значения из ПР попадают в интервал характерных размеров шлифовального зерна, это 950 мкм и 200 мкм. Если рассматриваемая закономерность свойственна и для абразивного материала, то при дроблении исходного материала, независимо от выбора технологических параметров, выход продукта будет тяготеть либо к одному из двух ПР, либо к двум одновременно. Это должно приводить к относительному понижению выхода шлифовального зерна с промежуточными размерами, в частности с размером 400 мкм, в то время как по статистическим данным абразивной отрасли материал именно этой зернистости пользуется повышенным спросом в обрабатывающей промышленности.

Поэтому анализ возможных причин появления ПР является актуальной практической задачей, так как вскрытие сущности этого явления помогло бы в поиске наиболее эффективных методов получения заданных размеров шлифовальных зерен.

Но практическое использование обнаруженной закономерности затруднено, т.к. «сейчас нет надежных объяснений описанного свойства. Некоторые представления о причинах его появления можно получить, рассматривая деформированный твердый материал как открытую систему элементов-отдельностей...» [1, с. 71]. Следовательно, совершенно необходим предварительный теоретический анализ явления ПР.

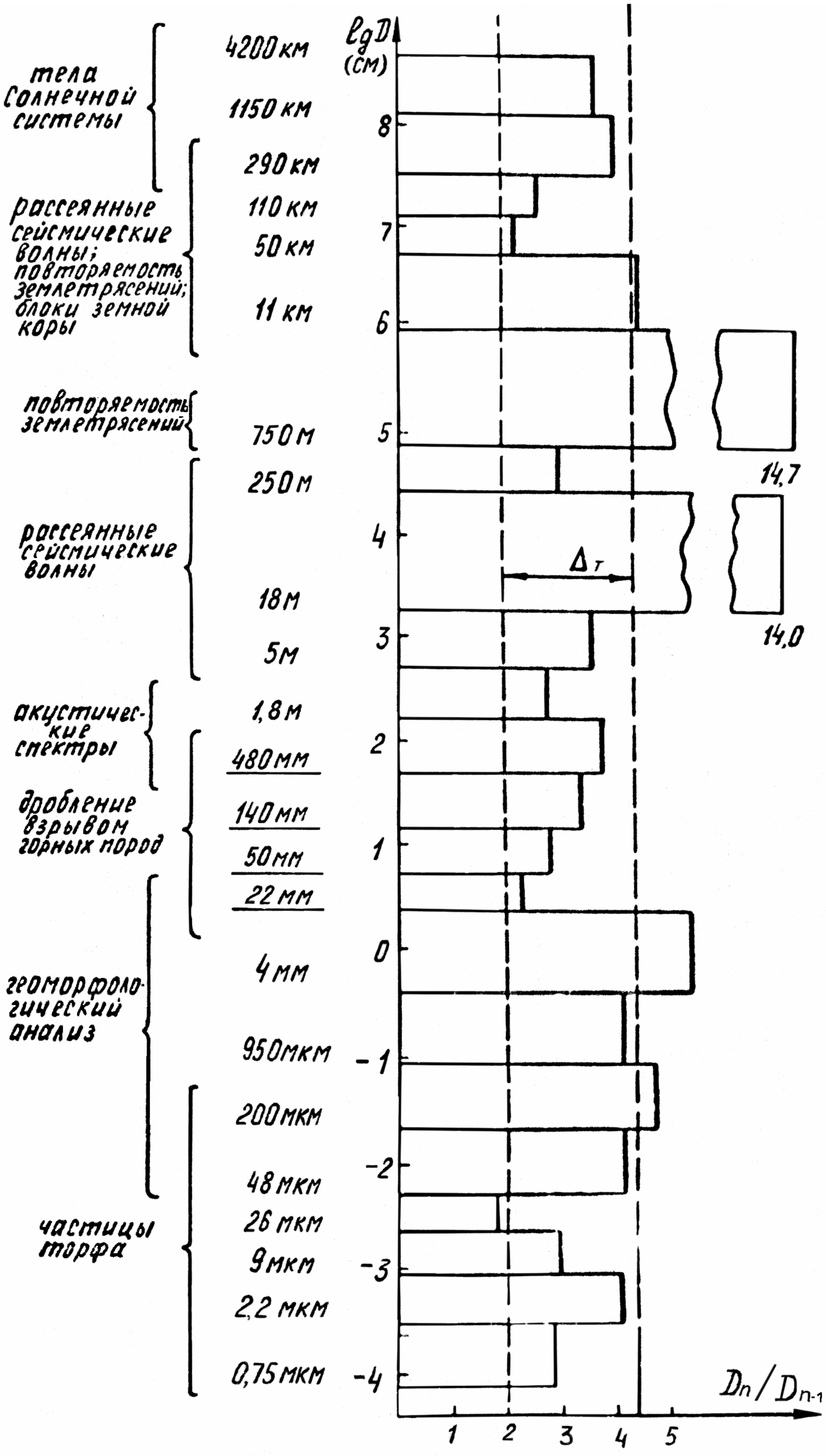

Рис 1.
Ряд «преимущественных» размеров по М.А. Садовскому [1]
и гистограмма отношений между ними (справа)

I. Выбор методики анализа. Обоснование модели

Наличие «преимущественных» размеров в любом конкретном блоке материала, каким бы методом оно не выявлялось, показывает, что структура материала имеет тенденцию к иерархической упорядоченности. То есть весь блок состоит из подблоков приблизительно одинакового размера, которые в свою очередь состоят из подобных же субблоков (рис. 2а). В самом деле, если бы мы имели открытую и регулярную структуру блока, подобную идеальной кристаллической без дальнего порядка (рис. 2б), то вероятность разделения ее на части с какими-либо постоянными характерными размерами была бы близка к нулю.

Наличие иерархической упорядоченности должно проявляться и в упорядоченности дефектных зон блока, и в особенностях его разделения на части (отдельности) любым возможным способом (разрыв, дробление и т.п.), и в ряде физико-механических характеристик материала. Подобная структура материала, вообще говоря, хорошо изучена, например, для металлов часто выделяют иерархическую последовательность зерно → фрагменты → блоки [2].

Но наличие «преимущественных» размеров вносит в это явление неожиданные особенности: во-первых, независимость абсолютных «преимущественных» размеров от физико-механических свойств, вида материала, а, во-вторых, универсальность явления ПР в интервале от субмикронных размеров и меньше до макроразмеров и больше. Эти особенности лишают основания любую модель явления, которая бы опиралась на конкретные свойства материалов. Объяснение явления ПР должно быть инвариантно относительно: а) смены физико-механической основы; б) смены уровня организации материи (от микро- до мегауровней); в) смены типа процесса формирования материала.

Необходимо также отметить связь между «преимущественностью» размеров отдельностей и их устойчивостью. В ряде случаев отдельности были получены в результате дробления — динамического процесса, в котором «выживают» наиболее устойчивые образования. Здесь связь очевидна. Но можно предположить, что в во всех других случаях структура с ее отдельности формировалась в динамических процессах, и устойчивость отдельностей тесно связана с «преимущественностью» их распределения. Если это так, то разделение отдельностей на «преимущественные» и «редкие» размеры связано с разделением их на устойчивые и неустойчивые системы, а функция распределения частоты встречаемости отдельностей по масштабной оси отражает некую, неизвестную еще, функцию устойчивости, аргументом у которой является масштабный фактор.

Отдельно следует остановиться на требовании инвариантности по п. «б». В самом общем виде типы процессов формирования отдельностей можно разделить на две группы: процессы синтеза и процессы деления [3]. В принципе эти процессы противоположны, но отдельности могут получаться как в результате «сборки» элементов, так и в результате фрагментации однородной среды. Естественно, что механизмы процессов в отмеченных случаях будут существенно различными. Однако ясно, что процесс синтеза может происходит лишь в достаточно разреженной среде, т.к. в плотной среде свобода перемещения элементов ограничена. Сама же плотная среда очень часто формируется из разреженной. Так, во всяком случае согласно современным представлениям [4], образовались все тела Солнечной система. В процессе медленного остывания, фазового перехода из жидкого состояния в твердое, образовалась и значительная часть литосферы. Поэтому процесс фрагментации можно отчасти принять за вторичный по отношению к процессу синтеза — фрагментация большинства отдельностей литосферы происходит по «слабым» участкам, стыкам зон синтеза, там, где скапливались дислокации. Этот вывод отчасти позволяет нам избавиться от необходимости анализа механизмов фрагментации и сконцентрировать все внимание на процессе синтеза. В то же время мы считаем совершенно необходимым отметить, что вывод о вторичности процессов деления и первичности процессов синтеза дан здесь исключительно в узких рамках поставленной задачи.

Итак, методика анализа заключается в рассмотрении в самом общем виде процесса синтеза, ведущего к образованию устойчивых отдельностей на неограниченном интервале масштабных уровней.

В качестве модели выберем модель упаковки единичных шаров, обладающих свойством притяжения друг к другу. Сила притяжения останется свободным параметром, в общем виде обратнопропорциональны расстоянию между шарами. Аналогичная модель использовалась для объяснения образования устойчивых кластеров атомов свинца, сурьмы, золота и т.д. в среде инертных газов [26, 27]. В этих работах использовалась упаковочная модель из единичных шаров, и авторы абстрагировались от реальных конфигураций электронных оболочек. Можно допустить, что эта модель достаточно приемлема и в нашей работе, т.к., во-первых, среднестатистическую форму множества, отдельностей можно принять близкой к шару, во-вторых, анализ упаковки шаров имеет особое значение в силу их предельной симметрии (анизотропный шар имеет группу симметрии ∞/∞/mmm [5]) и его результаты незначительно отличаются от анализа фигур другой конфигурации [6].

Рассмотрим, от чего зависит устойчивость упаковок. В работе [26] в явном виде постулируется прямопропорциональная зависимость устойчивости кластеров от числа связей, приходящихся на элемент — n_i, что эквивалентно при моделировании числу пар контактов, приходящихся в упаковке на один шар. Кроме того, в неявном виде авторы работ [26, 27] используют, причем не совсем последовательно, фактор внешней симметрии упаковки (кластера). Из всех возможных конфигураций из N элементов, образующих эмпирически установленную устойчивую систему кластера (значения таких N получили названия магических чисел), ими чаще всего выбираются в качестве геометрической модели наиболее симметричные упаковки.

По сути дела, авторы этих работ используют при анализе зависимость устойчивости кластеров от внутренних (n_i) и внешних факторов. Как было показано в работах [7, 8], такое разделение является достаточным и полным на первом этапе любого анализа. Поэтому в данной работе устойчивость упаковок мы будем определять через их реакцию на внутренние и внешние факторы с учетом плотности упаковки, которая обеспечивает максимальную силу притяжения между всеми шарами.

2. Упаковочная модель образования устойчивых отдельностей

Единичные шары могут соединяться в конфигурации различных типов. Необходимо в первую очередь различать разномерные типы, в частности 2-мерные (E^2) и 3-мерные (E^3).

В 2-мерном случае, на плоскости при выполнении условия наиболее плотной упаковки шаров образуется единственно возможная конфигурация (рис. 2в). Каждый шар в ней окружен 6 соседями без малейших зазоров. Вели выделить конфигурации первого уровня $I\text{-}K_1^2$, $0_0+0_1 = 1+6$, где 0_i — область окружения, а I = 0, 1, 2,.. — порядок области, как самостоятельные единицы, то их внешняя (поверхностная) симметрия не нарушена, плотность пар контактов внутри них равна $n_{(1)}^{2}$ = 12/7 ≈ 1,7 и является максимально возможной при этих условиях. Мало того, если из этих конфигураций составить конфигурацию следующего, второго уровня 2–K_1^2, то она не будет иметь не только зазоров, но я не принадлежащих к 1– K_1^2 конфигурации шаров (рис. 2г). Следовательно, образование иерархического порядка на плоскости, при условии максимальной плотности упаковки шаров, не нарушает регулярность 0–K_1^2 конфигурации, т.е. не ведет к каким-либо нарушениям симметрии на 0-уровне иерархии, а кроме того, не приводит к каким-либо нарушениям внутренней и поверхностной симметрии конфигураций любого уровня.

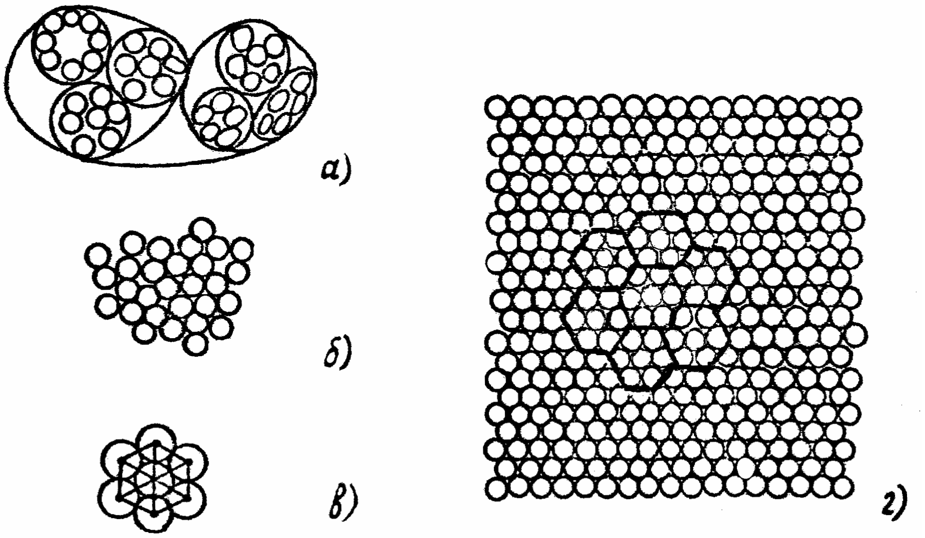

Рис. 2.
Модели плоских упаковок: а) с наличием иерархии блоков, б) открытой, без иерархии, в) наиплотнейшей, с одним, центральным элементом, г) наиплотнейшей, открытой с псевдоиерархией.

Совершенно иной результат мы получаем в 3-мерном случае.

0–K_1^3. Минимальная трехмерная упаковка, состоящая из 4 шаров, центры которых образуют 3-симплекс (рис. 3а).

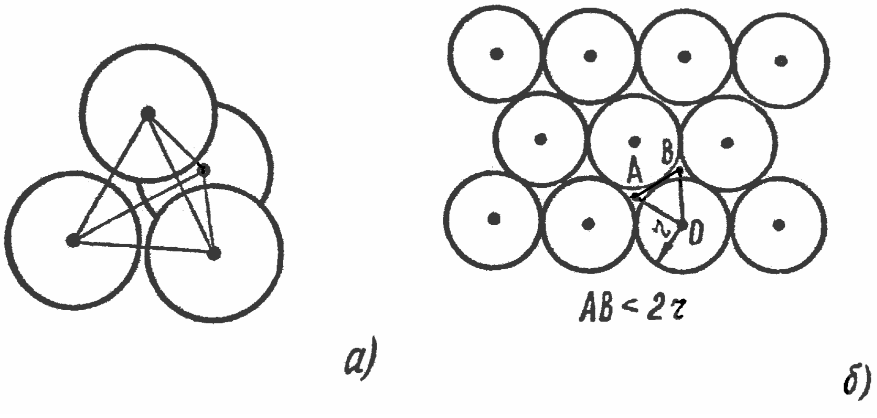

Рис. 3.
Упаковки: а) минимальная трехмерная, б) плоская, со вторым слоем.

1) Число контактов на один шар невелико $n^{3}_{(1)} = 6/4 = 1,5$.

2) Внутренняя симметрия предельна, т.к. не только все шары равны между собой, но и расстояния между любой парой шаров одинаково.

3) Поверхностная симметрия сохранена, если можно в данном случае говорить о какой-либо поверхности.

4) Соединить эти тетраэдры в открытые симметричные упаковки, центры шаров которых образовали бы решетчатую упаковку невозможно, так как они не относятся ни к одному из пяти типов типологических сеток параллелоэдров.

1–$K^{3}_{2,3}$. Плотнейшие симметричные упаковки в трехмерном пространстве отличаются по своим свойствам от плотнейших симметричных в 2-мерном весьма существенно. Приведем отрывок из работы Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [9, с. 53–54], содержащий классический анализ способов получения плотнейших упаковок в 3-пространстве.

«Опишем более подробно это расположение шаров. Вообразим себе сначала плоский слой, составленный из единичных шаров так, что их центры образуют решетку плотнейшего расположения кругов на плоскости. Очевидно, мы таким образом получим наиболее плотную плоскую упаковку шаров.

Возьмем теперь второй такой же слой так, чтобы оба слоя оказались между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми было бы возможно меньше. Чтобы достигнуть этого, необходимо положить шары второго слоя как раз в углубления, получившиеся между шарами первого слоя. Однако при этом не хватит места для заполнения всех таких углублений, и необходимо все время перескакивать через одно углубление (рис. 3б — С.С.И.). Если теперь мы захотим таким же образом наложить третий слой шаров на первые два, то взаимное расположение трех слоев еще не определено однозначно. С одной стороны, можно так наложить третий слой в углубления второго, что первый и третий слои будут расположены симметрично относительно второго (рис. 4а — С.С.И.). С другой стороны, мы можем положить шары третьего слоя в углубления, остающиеся незаполненными при только что указанном расположении (рис. 4б — С.С.И.); тогда первый слой будет переходить во второй при посредстве такого же смещения, как и второй и третий. В этом случае бесконечное повторение этого же смещения в обе стороны даст упаковку шаров в виде ромбоэдральной решетки. Таким образом, в то время как на плоскости наибольшая плотность достигалась единственным способом упаковки кругов, та же самая задача в пространстве приводит по крайней мере к двум совершенно различным упаковкам шаров... При этом центры шаров вообще не должны образовывать правильной фигуры во всем пространстве, так как можно при переходе от слоя к слою произвольно выбирать один из двух способов расположения».

Рис. 4.
Трехмерная упаковка шаров: а) двухслойная, б) трехслойная.

Итак, правильность (симметричность) пространственной решетки не гарантируется в данных упаковках. При этом необходимо отметить, что в первом случае двухслойной упаковки 1–K_2^3 (так называемой гексагональной), мы имеем нерешетчатую упаковку, а во втором случае трехслойной упаковки 1–K_3^3 (так называемой кубической), мы имеем решетчатую упаковку.

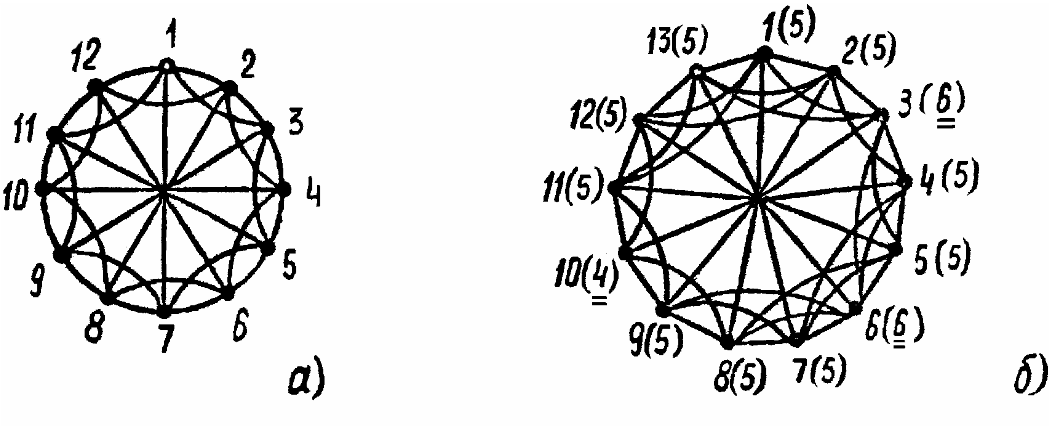

Рис. 5.
Графы конфигураций:
а) 1–$K_{2,3}^3$ (1+12), б) 1–K_4^3 (1+13,0)

Мало того, если эти упаковки и дают предельную плотность заполнения пространства единичными шарами, они не обеспечивают выполнения ряда требований к предельной устойчивости.

1) Число контактов на один шар близко к пределу $n_{(2,3)}^3 = 36/13 = 2,8$ (рис. 5а), но не максимально.

2) Внутренняя симметрия (равенство шаров) сохраняется, но расстояния между любыми двумя шарами не равны одной величине, что, впрочем, выполняется только в упаковке 0–K_1^3.

3) Поверхностная симметрия нарушена, так как часть просветов между шарами 0_1-окружения треугольны, а, часть — четырёхугольны (рис. 4а, б).

4) Из упаковок 1–$K_{2,3}^3$ (рис. 4а, б) можно собрать бесконечное множество различных типов открытых структур, в том числе и решетчатую.

1–K_4^3. Упаковка шаров в трехмерном пространстве, обеспечивающая предельное число контактов, получается нетрадиционным способом. Задача поиска максимального числа единичных шаров, которыми можно было бы окружить центральный, была поставлена еще Ньютоном и Грегори [6]. Однако до сих пор не удалось найти теоретического доказательства того эмпирически очевидного факта, что вокруг центрального шара нельзя расположить более 12 таких же шаров. Дело в том, что свободного пространства вокруг одного шара чуть больше, чем требуется для плотного расположения 12 периферийных шаров, и при любом их уплотненном расположении остается небольшой «люфт». Но тогда можно предположить, что в множестве подобных упаковок под воздействием достаточного внешнего давления, приводящего к деформации шаров, эти люфты будут заполняться дополнительными шарами. Традиционными геометрическими методами решить вопрос о количестве дополнительных шаров не удалось, т.к. ситуация требует среднестатистической оценки. Но из практики известно, что горошины, свинцовые и пластилиновые шарики, спрессованные вместе, имеют по 13...14 граней [10], т.е. при деформации в свободные пространства как бы проникает по 1–2 дополнительному шару, оставляя на поверхности шаров свои граненые отпечатки. Постановка этой задачи автором стимулировала ее теоретическое решение Х. Мюллером. Результаты работы были доложены им на семинаре МОИП по теоретической и математической биологии 19 мая 1982 г. и на конференции в Волгограде [11]. Теоретически было получено следующее соотношение: $0_1+0_2 = (1+13,4)$. Это означает, что в среднем к каждой симметричной упаковке (1+12) добавляется по 1,4 элемента.

1) Следовательно, число пар контактов на один единичный шар предельно и в случае открытой упаковки равно в среднем 13,4; $n^3_{(4)} = 48/15 \approx 3,3$ (рис. 5б).

2) Полностью нарушается внутренняя симметрия, так как от единичных шаров мы переходим к единичным (13–14)-гранникам.

3) Полностью нарушена поверхностная симметрия, т.к. у (13–14)-гранников не может быть ни одной оси симметрии кроме осей первого порядка [5].

4) Плотнейшая упаковка, естественно, возможна, но она никоим образом не будет решетчатой или регулярной.

Во всех рассмотренных случаях не сохраняется поверхностная симметрия. Рассмотрим поэтому три конфигурации с высокой поверхностной симметрией, достижение которой осуществляется за счет потери устойчивости по другим компонентам.

$1\text{–}K^3_5$. Открытая икосаэдрическая конфигурация шаров получается, если центры шаров образуют вокруг центрального шара вершины икосаэдра. Однако, хотя все просветы становятся одинаково треугольными, шары на поверхности не касаются друг друга и имеют лишь по одной точке касания с центральным шаром (рис. 6а). Это получается из-за того, что «люфт» в этом случае равномерно распределен между всеми шарами, и они чуть-чуть отдалены друг от друга. Каждый шар в этой конфигурации находится как бы на вершине сферической поверхности, откуда любое возмущение способно сдвинуть его в сторону одного из ближайших 5 соседей, нарушив тем самым поверхностную симметрию.

1) Естественно, что число пар контактов на единичный шар мало $n^3_{(5)} = 12/13 = 0,92$.

2) Но внутренняя симметрия сохранена.

3) Так же сохранена и внешняя симметрия.

4) Однако из подобных конфигураций составить решетчатую упаковку уже невозможно.

$1\text{–}K^3_6$. Закрытая икосаэдрическая конфигурация шаров получается, если нарушить внутреннюю симметрию и один центральный шар взять несколько меньшего диаметра. Диаметр этого шара определится из условия: необходимо вписать шар внутри икосаэдрической конфигурации, образованной плотно соприкасающимися между собой 12 шарами. Значение его равно 0,9022, оно определяется из значения диаметра описанной вокруг икосаэдра сферы [12].

1) Число пар контактов на один шар достаточно велико, так как каждый шар на поверхности касается пяти соседей и одного центрального шара, $n^3_{(6)} = 42/13 = 3,22$. Однако это значение не максимально.

2) Значительно нарушена внутренняя симметрия, так как центральный шар стал меньшего диаметра.

3) Высока внешняя симметрия, так как шары, плотно прилегая друг к другу, образуют своими центрами вершины одного из правильных платоновских тел — икосаэдра.

4) Соединение данных конфигураций вместе не приводит к образованию регулярной решетки.

2–K_7^3. Полностью закрытая икосододекаэдрическая конфигурация шаров получается, если все 20 просветов открытой икосаэдрической упаковки заполнить единичными шарами. В этом случае образуется конфигурация $0_0+0_1+0_2$ = 1+12+20, в которой вокруг центрального шара, не касаясь друг друга, располагаются 12 шаров первого порядка, а за ними 20 шаров второго. При этом каждый из шаров второго порядка, располагаясь в лунке из 3 шаров первого порядка, значительно повышает их устойчивость (рис. 6*б*), так как они «заклиниваются» с пяти сторон совершенно симметрично. Конфигурация получается самостабилизирующейся, тем более, что все 20 шаров дополнительно притягиваются еще и к центральному шару.

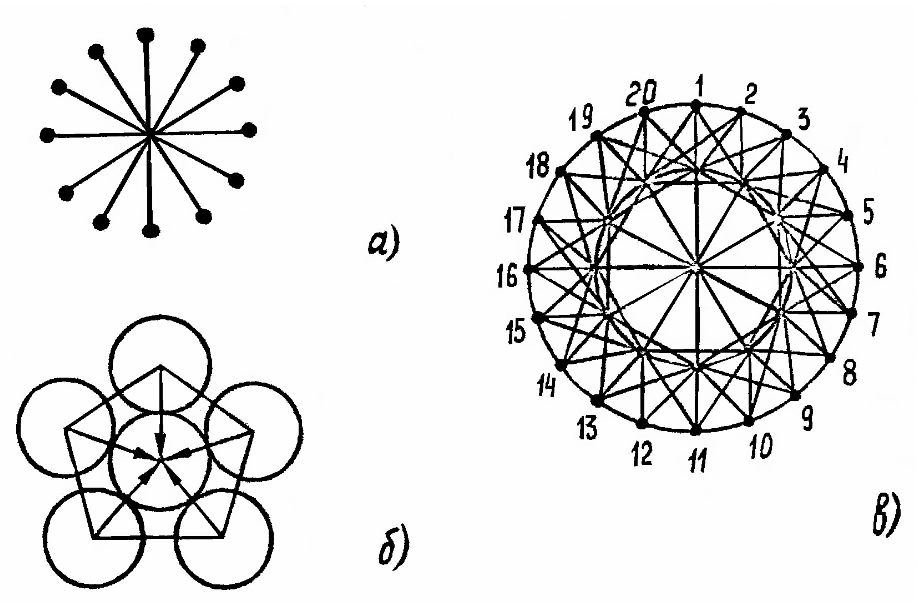

Рис. 6.

Модели и графы: а) граф конфигурации 1–K_5^3 (1+12), б) модель фиксирующего воздействия шаров из 0_2 на шар из 0_1, в) граф конфигураций 2–K_7^3 (1+12+20).

1) Это, естественно, сказывается и на значении $n^3_{(7)}$ = 72/32 = 2,25 (рис. 6б), оно почти в 2,5 раза больше $n^3_{(5)}$. Следовательно, устойчивость этой конфигурации значительно повысилась.

2) Полностью сохраняется внутренняя симметрия.

3) Поверхностная симметрия конфигурации подобна симметрии квазиправильного комбинированного многогранника — икосододекаэдра [13, с. 36], который можно рассматривать как общую часть соединения двух правильных платоновских тел — икосаэдра и додекаэдра.

4) Решетчатая упаковка из подобных фигур не образуется. У данной конфигурации имеется еще одна замечательная особенность, свойственная только ей и еще конфигурации.

1–K_4^3, — центральный шар закрыт со всех сторон без единого просвета. Если бы мы захотели рассмотреть цвет центрального шара, то сделать это, не нарушив поверхности этих двух конфигураций, было бы невозможно, В остальных рассмотренных случаях этой проблемы не существует. Данное свойство может иметь большое значение при моделировании отдельностей, для элементов которых имеет существенное значение экранируемое полевое (или лучевое) взаимодействие.

Таблица 1

Характеристики некоторых конфигурационных упаковок
(трехмерное пространство)

Тип конфигурации	Плотность пар контактов в конфигурации, $n^{j}_{(i)}$	Число касаний шара с соседями в бесконечной упаковке, $n^{j}_{(i)}$	Симметрия конфигурации		Характер решетки		Диаметр конфигурации, усл. ед.
			Внутренняя, In	Внешняя, Out	правильная	неправильная	
1–K_5^3	0,92	–	+	+	–	–	3,0
0–K_1^3	1,5	–	$\boxed{+}$	+	–	–	2,0
2–K_7^3	2,25	–	+	+	–	–	$\boxed{< 4{,}28}$
1–$K_{2,3}^3$	2,8	–	+	–	$\boxed{+}$	+	3,0
1–K_6^3	3,22	12	–	$\boxed{+}$	–	–	~ 2,90
1–K_4^3	$\boxed{3{,}31}$	13,4			–	+	3,15

Дальнейшее наращивание слоев шаров третьего и более порядков здесь не рассматривается и предполагается, что симметрия таких конфигураций, а, следовательно, и устойчивость должна падать. Надо отметить, что сравнение симметрии а, следовательно, устойчивости конфигураций в данной работе производится качественно. Это отчасти обусловлено отсутствием разработанной метрической шкалы степени симметрии фигур в теории симметрии. Поэтому в табл. 1 все конфигурации упорядочены по мере возрастания значения в таблице обведены квадратами значения или символы относящиеся к максимальным пределам в рассмотренной совокупности конфигураций. Наибольшей устойчивостью относительно фактора удельной связанности обладает конфигурация 1–K_6^3, относительно внутренней симметрии — 0–K_1^3, относительно внешней симметрии — 1–K_6^3, относительно внешней упаковки в решетчатую структуру — 1–K_3^3. Но ни в одной из конфигураций не достигается максимальной устойчивости относительно всех перечисленных факторов. Следовательно, усиление устойчивости образований по отношению к какому-либо одному фактору сразу приводит к потере устойчивости по отношения к остальным факторам. Этим ситуация в корне отличается от ситуации в 2-мерном пространстве.

Правда, некоторые конфигурации имеют комплексную предельную устойчивость по отношению сразу к нескольким факторам. Например, 1–K^3 — предельно симметрична внутренне и внешне, но имеет чрезвычайно низкое значение $n_{(i)}^{j}$. Более устойчивой, видимо, является конфигурация 2–K_7^3 имеющая, правда, несколько менее симметричную поверхность, но зато и более высокое значение $n_{(i)}^{j}$.

Вообще говоря, здесь рассмотрены далеко не все особенности конфигураций в 3-мерном пространстве. Но нас в первую очередь должны интересовать те конфигурации, которые обеспечивают высокую поверхностную устойчивость и достаточную степень связанности шаров. Высокая поверхностная устойчивость является фактором, который обеспечивает получение относительно автономных объединений элементов в целостную единицу следующего уровня. Среди рассмотренных конфигураций — это тетраэдрическая, закрытая икосаэдрическая и икосододекаэдрическая упаковки. Они могут рассматриваться как элементы, из которых складываются конфигурации следующего уровня любым из рассмотренных здесь путей. Если на этом новом уровне поверхностная устойчивость будет достаточно высокой, возможно создание еще одного уровня и так до бесконечности. Естественно, что мы абстрагируемся от реальной формы конфигураций, чтобы упростить задачу. Но конфигурации 0–K_1^3, 1–$K_{5,6}^3$ и 2–K_7^3 не позволяют переходить к периодическим потенциально бесконечным решетчатым упаковкам, их устойчивость как бы замкнута сама на себя.

Поэтому важно подчеркнуть, что для перечисленных конфигураций, пожалуй, более выгодным становится образование конфигурации следующего уровня, чем образование решетчатой открытой структуры, элементами которой будут элементы конфигураций. Такое иерархическое построение сохраняет больше элементов симметрии, чем соединение конфигураций «навалом». Конечно, промежутки между конфигурациями могут при этом заполняться более мелкими конфигурациями любого нижележащего уровня организации, но могут оставаться и частично пустыми. Следовательно, в 3-мерном случае в зависимости от соотношения действующих факторов могут образовываться структуры гораздо большего разнообразия, чем в 2-мерном. И, кроме того, многие свойства 2-мерных и 3-мерных структур, образованных из одних и тех же элементов, должны быть различными из-за различия их симметрий. Это вполне согласуется с эмпирически установленными фактами для пленочных структур [14, 15]. Вероятно, что именно упаковочное различие является фундаментом для физико-механического. Во всяком случае, образование иерархии в плотнейшей упаковке шаров на плоскости не приводит к неизбежным в 3-мерном случае дефектам структуры (рис. 2г).

Кроме того, моделирование позволяет сделать еще одно заключение относительно связи между величиной внешнего давления и наиболее вероятным типом структуры:

1) При относительно большом внешнем давлении скорее всего будут образовываться регулярные или квазирегулярные упаковки по типу 1–$K_{2,3}^3$ и 1–K_4^3.

2) Если оболочки элементов могут быть сдеформированы под действием внешнего давления, то при некоторой его критической величине силы притяжения между элементами превысят удельные силы внешнего воздействия и появятся отдельностями по типу 1–K_6^3 (1+12).

3) В промежуточном между 1-м и 2-м случаем могут возникать отдельности (0+4) по типу 0–K_1^3. Они более устойчивы к внешним воздействиям, но не образуют регулярной решетки.

4) При еще большем понижении внешнего давления элементы могут собраться и в довольно громоздкие конфигурации по типу 2–K_7^3 (1+12+20).

В подтверждение этих выводов приведем примеры.

При предельном давлении, еще сохраняющем границы между элементами, согласно модели должны образовываться упаковки по типу 1–K_4^3 (1+13,4). Многочисленные эксперименты с шарами из свинца, пластилина и горошинами показали, что у них число граней колеблется от 13 до 14. В большинстве своем эти грани — пятиугольники, немного четырех- и шестиугольников. Аналогичная ситуация наблюдается и для растительных клеток. То же относится и к мыльной пене, состоящей из тысяч пузырьков, причем в центре пены, где давление несколько больше, больше и граней — 13,7, а на периферии их меньше — 13 [10].

Упаковка по типу 1–K_2^3 (гексогональная) свойственна строению металлов: магния, бериллия, цинка, кадмия и многих других. Упаковка по типу 1–K_3^3 (кубическая) свойственна структуре меди, золота, серебра, алюминия, свинца и ряда других металлов [16].

Упаковки по типу 0–K_1^3 согласно модельной логике появляются при некотором понижении внешнего давления. Действительно, исследование структуры поверхности ядер атомов [17] показали, что почти у всех тяжелых ядер нуклоны на поверхности собраны в альфа-частицы (два протона и два нейтрона). А ядро углерода-12 практически целиком состоит из трех альфа-частиц.

Идеальными условиями для проверки моделирования некоторых видов конфигураций являются условия синтеза атомных кластеров. Пары металлов конденсируются в устойчивые и неустойчивые кластеры в специально созданных для этого камерах. Числа атомов в устойчивых конфигурациях получили название «магических». Для сурьмы это 8, 36, 52, 84; для свинца 7, 10, 13, 17, — причем, 13 = 1+12.

Следует отметить, что «магические» числа в основном не превышают нескольких десятков, что свидетельствует, о резком падении устойчивости кластеров, имеющих области второго и более порядков. Для нескольких химических элементов устойчивым является кластер с типом структуры (1+12). Скорее всего его структура подобна 1–K_6^3.

Однако существует множество устойчивых конфигураций с «магическими» числами атомов в них, которые не объясняются в модели. Это требует специального анализа и детализации модельной логики.

Подводя итоги, можно предположить, что в первом приближении многофакторный анализ устойчивости моделей упаковок позволяет объяснить ряд особенностей формирования и свойств реальных отдельностей. Часть конфигурации с повышенной поверхностной устойчивостью могут естественным образом соединяться в иерархическую последовательность. Моделирование позволяет установить и относительное увеличение размеров конфигураций при переходе от уровня к уровню. Для этого достаточно установить во сколько раз выделенные типы конфигураций больше своих элементов.

Размер конфигурации 0–K_1^3 ровно в 2 раза больше размера единичного шара.

Размер 1–K_6^3 в 2,90 раза больше размера единичного шара.

Размер 2–K_7^3 точно автором не определялся, но его верхняя граница равна 4,28 единицы.

Таким образом, модельный теоретический интервал шага размеров $\Delta T =$ 2...4,28. Он несколько уже эмпирического 1,8...5,5 (рис. 1). За нижнюю теоретическую границу выходит одно значение, а за верхнюю три эмпирических значения. Естественно, что чрезвычайно упрощенная модель и не могла дать точного значения эмпирического явления ПР. Во-первых, существенно могло повлиять отсутствие у элементов отдельностей идеальной формы шара, которое должно приводить не к фиксированным значениям ПР, а к их среднестатистическим значениям, определение моды которых на практике может иметь и некоторые погрешности. Во-вторых, мы не учитывали в модели разницу размеров отдельных элементов, из которых состоят отдельности. Если выдвинутый принцип формирования исследованных в работе [1] отдельностей верен, то этот процесс должен начинаться еще с уровня атомов, при образовании из них первичных кластеров. Литосфера на 95% состоит из изверженных пород, главным образом, базальтовых и гранитовых. Наиболее распространенные элементы литосферы и их радиусы приведены в табл. 2.

Таблица 2

Данные о наиболее распространенных элементах литосферы

Химический элемент	Содержание в литосфере в атомных %	Радиус атома в кристаллических структурах с координационным числом Р = 12, Ǻ
O	58,0	1,46…1,56 (ионные радиусы)
Si	20,0	1,34
Al	6,6	1,43
Na	2,4	1,89
Fe	2,0	1,26
Ca	2,0	1,97
Mg	2,0	1,60

Из табл. 2 видно, что на 84,6% породы составлены из элементов (O, Si, Al), размеры атомов которых отличаются в 1,16 раза, на 93,4% — из элементов, отличающихся размерами в 1,47 раза, а 58% породы составлены из атомов кислорода.

Из этого следует, что в первом приближении выбор в качестве единиц моделирования одинаковых шаров вполне допустим, а отклонения от полученного интервала могут получаться из-за разницы в форме и размерах реальных элементов.

Таким образом, можно предположить, что дефекты в структурах пород, определяемые, как границы отдельностей, различными методами, имеют истоки в характере упаковок элементов пород и этим же объясняется появление «преимущественных» размеров в природе.

3. Предварительное обобщение. Возможность использования модели для прогноза детальной структуры отдельностей

Результаты моделирования показали принципиальную возможность использования закономерностей упаковок для объяснения характерных размеров различных материалов. При этом выявилась связь между, на первый взгляд, отдаленными объектами: кластерами и отдельностями, частицами торфа и блоками земной коры, зернами шлифовальных материалов и дроблеными горными породами. Подчеркивая связь между этими объектами и явлениями, мы опираемся на предположение, что тенденция к образованию устойчивых конфигураций свойственна любому уровню организации вещества и в основе этой тенденции лежит динамичность процесса формирования отдельностей. Правда, если для микроотдельностей (например, от атомов и больше) динамичность формирования очевидна, то для макро- и мегаотдельностей может вызвать сомнение. Но, если учитывать выводы теории мобилизма, согласно которой вся литосфера постоянно подвергается динамическим воздействиям, соизмеримым по масштабу с прочностью отдельностей всех уровней, вплоть до континентальных плит [19], или если и не опираться на эту теорию, то все равно придется отметить, что динамическое воздействие свойственно любому уровню организации вещества литосферы. Естественно, что даже если когда-то, где-либо образовывались исключительно регулярные структуры породы, они впоследствии могли быть разломаны на отдельные блоки, которые, взаимодействуя друг с другом, разрушались до устойчивых конфигураций-упаковок.

Но, кроме обобщенного анализа явления ПР моделирование позволяет выявить и специфику каждого уровня организации вещества.

В модели (см. табл. 1) у каждого вида конфигурации есть свой специфический размер, который является в то же время и шагом между устойчивыми размерами. Исходя из этого, можно предполагать, что для частиц с размерами 0,75 мкм не свойственно соединение ни в тетраэдрические, ни в икосододекаэдрические упаковки, а для частиц размером 26 мкм, скорее всего, характерно соединение в тетраэдрические комплексы размером около 50 мкм. Также можно предположить, что субструктура частиц с размером 950 мкм близка к двухслойной икосододекаэдрической упаковке. Такие выводы, впрочем, могут оказаться совершенно неверными из-за того, что мы исходили только из трехмерной модели упаковок, в то время, как отдельности могут иметь и квазидвухмерную пластинчатую структуру или квазиодномерную игольчатую. Однако можно довольно корректно проверить некоторые выводы, анализируя материалы, образующие в основном квазитрехмерные, сфероидальные отдельности. В частности, это может оказаться чрезвычайно полезным при анализе структуры зерен тех шлифовальных материалов различных размеров, форма которых тяготеет к сферической.

Кроме того, предположение о неравномерном понижении прочности отдельностей по изменению их размеров можно проверить, детально исследуя прочность абразивных зерен в интервале от 1 до 2500 мкм с шагом 1,25. Для этого необходимо тщательно отсортировать зерна одинакового размера с каждой рассеиваемой фракции: 2500, 2000, 1600 мкм и т.д., и определить их среднюю удельную прочность. Моделью предсказывается, что наряду с общим повышением прочности при переходе от больших размеров к меньшим в районе ПР (1000 мкм и 200 мкм) должны наблюдаться горбы, связанные с локальным относительным повышением темпов возрастания прочности.

На рис. 1 видно, что шаг квазипериодически уменьшается и увеличивается. Согласно модельной логике, чем меньше шаг, тем, в общем, выше внешнее давление на формируемые отдельности (см. разд. 2). «Громоздкие» отдельности могут сформироваться только в спокойных, почти статических условиях. Если взять на вооружение этот вывод, то анализ шкалы ПР (рис. 1) позволяет предположить следующее:

— от субмикронных размеров вплоть до 10–30 мкм степень динамичности процессов формирования отдельностей значительно повышается;

— приблизительно от 30 мкм вплоть до десяти миллиметров степень динамичности постепенно понижается;

— после 20 мм происходит резкое возрастание динамичности процессов и затем ее медленное уменьшение, прерываемое скачком на масштабах порядка 1 м. Наиболее статичные условия существуют на масштабе от десяти метров до десяти километров, хотя на масштабе порядка 500 м наблюдается опять резкий скачок динамичности;

— после спада динамичности, на масштабе 50–100 км наблюдается еще один плавный максимум с последующим ослаблением.

Эти явления могут быть следствием квазипериодичности функции устойчивости (а следовательно и динамичности) масштабного фактора [3]. Анализ шкалы ПР позволяет выявить три наиболее явных максимума динамичности: $10^{-2,5}$ см и 10^7 см, а также два наибольших минимума динамичности: 10^0 см и 10^5 см. Причем от $10^{0,5}$ см до $10^{3,5}$ см наблюдается пологий максимум, особенно на фоне резких минимумов сверху и снизу. Если его грубо усреднить, то мы получим усредненный максимум 10^2см = $\sqrt{10^{0,5}\,см \times 10^{3,5} см}$. Отношения между тремя максимумами: $10^7/10^2 \approx 10^2/10^{-2,5} \approx 10^5$. Таким же является и отношение между двумя минимумами. Коэффициент 10^5 был ранее получен автором в работе [3] на основании обобщения других эмпирических фактов. Более того, в работе [3] прогнозировалось максимальное повышение устойчивости в районе размеров 10...30 мкм и 100...500 км. Эти размеры точно совпадают с ПР, определенными М.А. Садовским для наиболее компактных отдельностей (см. рис. 1). А чем более компактными являются отдельности, тем более они устойчивы при всех прочих равных параметрах. Следовательно, явление ПР и явление масштабной периодичности фактора устойчивости связаны друг с другом, а часть прогнозов работы [3] подтвердилась.

Здесь же следует отметить, что в работе [1] как бы неявно постулируется, что все отношения между соседними ПР колеблются вокруг среднего отношения 3,5. При этом, может возникнуть представление о том, что ряд ПР образует геометрическую прогрессию, заключая в себе идеальную пропорцию (особый вид симметрии).

Чтобы детально разобраться в этой проблеме, необходим ее анализ в рамках общей теории систем и теории симметрии.

4. Тип симметрии отдельностей

Если не вдаваться в детали структуры различных отдельностей, а лишь отметить их наиболее общее свойство образовывать многоуровневые структуры, следствием чего является нарушение регулярности строения материала, то причина этого свойства заключается в невозможности достижения полной симметрии в трехмерном пространстве: глобальная предельная симметрия кристаллических решеток достигается только за счет нарушения предельной локальной поверхностной симметрии комплексов ($0_2 = 12$) .Также верно и обратное: достижение предельной локальной симметрии в среде (симметрии отдельных комплексов) искажает глобальную симметрию решеток. Это взаимоисключение предельных проявлений глобальной и локальной симметрий неискоренимо и проистекает из самой сущности 3-мерного пространства, но, в частности, оно снимается в 2-мерном пространстве.

Это чисто теоретическое взаимоисключение приводит и к практической недостижимости любого из полюсов: в природе также редки чисто иерархические структуры, как и чисто регулярные, например, известно, сколько технологических усилий требуется для получения идеальных кристаллов.

При этом рассмотрение этого противоречия в его крайних проявлениях представляет собой отдельный интерес, ибо оно позволяет определить место явлений типа ПР в ряду аналогичных ему явлений на базе теории симметрии.

Бесконечные повторы, однообразные повороты и отражения, переносы на один шаг и неизменность элементов — все это характерно для идеальной кристаллической структуры. Последняя описывается языком кристаллографической симметрии, являющейся разделом симметрии классической. В классической симметрии применяется только два вида равенства фигур и их частей: равенство совместимое и равенство зеркальное. Однако стремление к простоте описания привело к известному парадоксу, следующим образом описанному Ю.А. Урманцевым: «Идеальные по своей форме кристаллы стали рассматриваться как... реальные с истинной симметрией, а отклоняющиеся от них — как ложные с искаженной симметрией. Первые в природе встречаются один на одну тысячу или даже несколько тысяч, с большим трудом их удается получить в лабораторных условиях. Вторые составляют... сверхподавляющую часть природных кристаллов. Они легко получаются в лабораторных условиях» [20, с. 26].

Постепенно произошел поворот теории к практике, но наиболее существенно это было стимулировано не проблемами самой кристаллографии, где искажения классической симметрии можно было вводить как возмущающий фактор условий и среды, а проблемами биологических структур, в которых сами искажения становятся правилом, а кристаллографические типы структур — отклонением. Именно стремление дать строгое математическое описание групп, симметрии, способных описывать всевозможные структуры типа морских раковин, елей и головок цветка подсолнуха правело Г. Вейля [21] и А.В. Шубникова [22] к введению нового вида симметрии — симметрии подобия. Согласно Вейлю и Шубникову симметрия подобия включает в себя классическую, как более частный случай, за счет добавления к двум видам равенства третьего — равенства формы.

Преобразования симметрии подобия (S^P) от шага к шагу меняют значения параметров (P_i) системы на величину $q = P_i/P_{i+1}$, где $q = 0\ldots\infty$. Если $q = 1$ (1), то параметры не изменяются, фигуры остаются равными и мы получаем частный случай — классическую симметрию (S^K). Если $q_i = \mathrm{const} \neq 1$ (2), то мы получаем другой частный случай — масштабную симметрию [3]. В масштабной симметрии любое преобразование либо уменьшает, либо увеличивает значение параметров. Если значение меняющихся параметров записать в строгой последовательности, то получится геометрическая прогрессия со знаменателем, равным коэффициенту увеличения (уменьшения). Масштабная симметрия, следовательно, противоположна симметрии классической. В ней от шага к шагу меняется абсолютная величина преобразования и если это изменение постоянно, то оно находит отражение в геометрической прогрессии. В классической же симметрии абсолютная величина преобразования остается неизменной.

Если снять ограничение на постоянство коэффициента (знаменателя): $q = f(n)$, где n-число шагов, то такой вариант масштабной симметрии можно задать, например, следующей формулой:

$$a_n = a_1 \times q_1^{(n-1)^{C_1}} \times q_2^{(n-1)^{C_2}} \ldots q_j^{(n-1)^{C_j}} = a_i^j \prod_{\varepsilon=1}^{\mathrm{j}} q_i^{(n-1)^{C_i}} \qquad (3)$$

где a_n — n-ный член прогрессии (величина параметра) после n преобразований, j — число уровней изменения q, c_j — коэффициент изменения на j-м уровне изменения. Можно привести пример. При $q = 2$, $C_2 = 1{,}6$, $j = 2$, $a_1 = 1$ мы получим формулу:

$$a_n = 2^{(n-1)+(n-1)^{1,6}},$$

которая задаст ряд чисел: 1, 4, 21, 50, 114... Набор чисел выглядит внешне довольно случайным, хотя фактически отражает конкретный вариант масштабной симметрии.

Пользуясь формулой (3), можно описывать не только сложные случаи подобия различных фигур, но и иерархическую структуру системы, в которой все субэлементы различных подуровней подобны сами себе и самой системе, но от уровня к уровню коэффициент подобия (или пропорциональности) изменяется. Поэтому именно этот вид симметрии как нельзя лучше позволяет описывать не только конфигурации с повышенной симметрией поверхности (см. раздел 2), но и образующуюся из них «лесенку» упаковок, в которой от шага к шагу меняется коэффициент подобия. Следовательно, выбрав формулу, подобную формуле (1), подбором соответствующих значений a_1, q, j, c_i можно видимо, смоделировать ряд «преимущественных» размеров (рис. 1). Однако, мы не ставим в данной работе столь сложную задачу, ограничиваясь констатацией предположения, что ряд «преимущественных» размеров может быть получен с использованием аппарата теории симметрии масштабной.

Следовательно, сам факт существования ПР отражает сложное проявление в природе масштабной симметрии и не случайно в чередовании этих размеров выявляется обнаруженный ранее [3] коэффициент масштабной симметрии 10^5.

Естественно, что действие масштабной симметрии и симметрии классической в рамках одного параметра приводит к противоположным, несовместимым результатам, ведь изменение размеров или любых других параметров фигур уничтожает их классическое равенство — никакими совмещениями или зеркальными отражениями не совместить шары двух, различных размеров. Следовательно, эти два вида симметрии находятся на взаимоисключающих полюсах. Чтобы разобраться в этом вопросе наиболее простым образом, необходимо рассмотреть однопараметрический вариант двух видов симметрии. Такой переход необходим еще и потому, что в явлении ПР отдельности сравниваются только по одному единственному параметру — размеру.

Сущность параметрического подхода заключается в том, что присутствие того или иного вида симметрии оценивается сначала на каждом независимом параметре гомеоморфного образа объекта в отдельности и лишь затем комплексно. Порождаемые при этом проблемы выбора достаточного и необходимого набора параметров решаются либо традиционным способом, либо через аппарат теории систем. Вообще говоря, категория симметрии является в общей теории систем аналогом категории равенства в математике. Но математическое равенство по отдельным параметрам еще не приводит к симметричному равенству. При этом вопрос не решается чисто количественно. Набор оцениваемых параметров должен отражать целостный образ, системную модель объекта, в которой взаимоувязаны все важные признака объекта. Иначе равными или подобными будут признаваться объекты, очевидно, неравные и не подобные, но с равными значениями отдельных параметров, например параллелепипеды одной высоты, но разной длины и ширины.

Так как мы подразделили симметрию на классическую и масштабную, то можно утверждать, что при понижении размерности или степени параметричности образа объекта симметрия классическая переводит в равенство, а симметрия масштабная — в пропорциональности. Например, в геометрической симметрии параллелепипеды симметричны, если только они равны по высоте, длине и ширине; прямоугольники, — если они равны по высоте и длине, а отрезки — если они равны по длине, т.е. всего по одному параметру. Это позволяет на простых однопараметрических примерах анализировать сложное взаимоотношение между двумя видами симметрии.

Рассмотрим переход от классической симметрии к симметрии масштабной в вырожденном однопараметрическом случае.

Классическая симметрия в этом случае задается законом распределения значений параметров по формуле (1), а симметрия подобия по формуле (2), когда $i = 1$. На рисунке 7 оба уравнения изображены на логарифмической оси. Промежуточный вариант (рис. 7б) можно рассматривать, как один из моментов перехода от классической симметрии к масштабной симметрии. Если мы зафиксируем в качестве исходного положения классическую симметрию (в однопараметрическом случае — равенство) и зададимся целью добиться постепенными изменениями значения параметра P_i у различных фигур максимального их неравенства, то точка на рис. 7*а*, как бы расслоится на множество n точек.

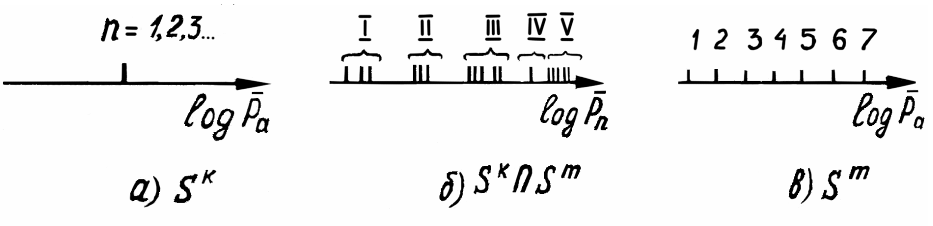

Рис. 7.

Однопараметрическая модель распределения значений параметра фигур: *а*) в случае S^K, *б*) в случае перехода $S^K \leftrightarrow S^m$ когда значения параметра сгруппированы, *в*) в случае S^m, когда значения параметра образуют идеальную геометрическую прогрессию.

Однако до тех пор, пока расстояния между этими точками будут различаться, как на рис. 7*б*, мы формально имеем право группировать близкие значения в классы эквивалентности, где они будут приниматься равными. Такая группировка на практике осуществляется в любом случае, так как абсолютно одинаковых значений параметров различных фигур в реальной природе не бывает; выбор степени неразличимости зависит от целей исследования, точности измерения и других непринципиальных факторов.

Поэтов все фигуры n-множества станут абсолютно неравными между собой только в том случае, когда расстояния между точками на оси станут абсолютно равными (рис. 7*в*). Становятся очевидным, что задача достижения максимального неравенства между изначально равными фигурами приводит к геометрической прогрессии, отражающей идеальную пропорцию. Так как пропорция является однопараметрическим вырождением масштабной симметрии, то можно расширить наш вывод: максимальное искажение условий классической симметрии приводит к предельной масштабной симметрии. Таким образом, разрушение одного вида порядка, равенства в пределе этой тенденции приводит к противоположному виду порядка и равенства, а не к хаосу асимметрии. Следовательно, хаос как бы заключен между двумя полосами порядка и появляется при переходе от одного из них к другому. Поэтому асимметричной можно считать такую фигуру, части которой имеют значения параметров, разницы между которыми больше принятых допусков неразличимости и никакая комбинаторика этих значений не приводит к образованию геометрической прогрессии.

При анализе однопараметрической ситуации мы выбрали мультипликативные критерии различимости. Это можно объяснить именно тем, что явление анализировалось на потенциально бесконечном множестве объектов, $n \to \infty$, а в этом случае любые аддитивные критерии различимости теряют свою силу. В то же время аддитивные критерии играют существенную роль в малом выборе схожих объектов.

Вернемся теперь к распределению на логарифмической оси ПР (рис. 1). Очевидно, что это распределение более близко к варианту на рис. 7*б*, чем к варианту идеальной симметрии подобия или классической. Этот вывод вполне естественен: структуры отдельностей литосферы далеки, как от идеальных кристаллических, так и идеальных иерархических. Поэтому выделение среднего шага в 3,5 раза между соседними ПР не следует абсолютизировать — разнообразие коэффициентов (от 2 до 5,5) несет дополнительную важную информацию о характере масштабной неинвариантности.

И здесь представляется необходимым сопоставить явление ПР с аналогичными ему явлениями в биологии. Так, в 1931 году Якоби (цит. по [23]) открыл закон ритмического удвоения объема клеточных ядер. Значения объемов ядер клеток биологического вида образуют единую геометрическую прогрессию со знаменателем достаточно близким к «2». В 1968 году Л.Л. Численко [24, 25] открыл явление равномерного логарифмического распределения средних размеров представителей таксонов высшего ранга, коэффициент геометрической прогрессии равен «3,15». Отклонения от этих коэффициентов (дисперсия) значительно меньше, чем в ряду ПР. Это свидетельствует о том, что биологические структуры значительно в большей степени организованы иерархично, а их симметрия блине к «масштабному полюсу» (S^m). Явления эти столь же глобальны по своему распространению, как и ПР, и столь же плохо объяснены на сегодняшний день.

Вместе с тем и в ряду ПР можно выделить довольно хорошо проявленную периодичность, но гораздо более крупного масштаба — 10^5. Возможно, что все косное вещество вселенной многоуровнево организовано на маленьком шаге масштабов асимметрично, а на большом масштабном шаге — масштабно симметрично.

Здесь очевидна взаимодополнительность двух видов симметрии. Ведь и чистая, симметрия равенства (S^k) и чистая симметрия неравенства (S^m) являются как бы различными сторонами одной медали — симметрии подобия. Разделение их в реальной природе на отдельные, несвязанные явления, видимо, невозможно также как и разделение полюсов магнитов (хотя поиск монополей по-прежнему продолжается и вопрос остается, по сути открытым.)

Во многих системах при анализе их отдельно выделенных параметров можно найти чистые S^k и S^m. Каким же образом соединяются вместе эти взаимоисключающиеся симметрии? Может быть за счет своеобразной «располюсовки» на чистую S^k и чистую S^m? Например, в раковине молюска Nautilus [21] параметр угла поворота меняется по закону S^k, а параметр приращения радиуса на каждый шаг поворота по закону S^m. Видимо, здесь проявляются особенности ортогональности параметрического пространства систем, независимость их координат. Именно это, скорее всего, позволяет части параметров подчиняться одной, а части параметров другой симметрии, связь же системы в целостную, единую структуру осуществляется на фундаменте свойств, описываемых третьей группой параметров, которые организованы смешанным образом. Это своего рода вариант толерантного синтеза. Если вернуться к примеру с магнитом, то взаимоотталкивание его полюсов (магнитные параметры) компенсируется притяжением его атомов (электромагнитные параметры).

Естественно, что возможен и нейтральный случай, без чистых проявлений S^k и S^m. 3 системах такого рода любой из выбранных параметров организован по смешанному закону (рис. 7*б*). Видимо, к этому случаю ближе всего и явление ПР.

Совершенно необходимо привести здесь и наиболее яркий пример разновидности масштабной симметрии, в последнее время в основном обнаруживаемый в биосистемах [20, 21]. Это так называемое «золотое сечение», которое появляется на пересечении действия двух важнейших принципов природы — принципа минимума и принципа масштабной симметрии подобия в процессе деления, $[(\text{min})\cap(S^m)\cap(\text{fragmen.})]$. Можно расширить область поиска «золотого сечения» за счет введения принципа золотого сечения: целое /1/ относится к своей большей части /X/ так, как последняя относится к оставшейся меньшей части /1–X/. Математическая структура этого выражения такова: $1/X = X/(1-X)$, откуда $X = 2/(1+\sqrt{5}) = 0{,}618...$ В формулировке принципа под «целым», «частью» и т.п. понимается какой угодно параметр, а не только длина отрезка, причем параметр может иметь многомерную природу (площадь, объем, тензор, энергия и т.п.).

Числа производные от золотого сечения преимущественно обнаруживаются в пропорциях биоструктур. Это связано с тем же выводом о принадлежности симметрии подобия к живой природе. (Оговорим здесь, что в это понятие мы включаем не только биологическую жизнь, поэтому обнаружение «золотого сечения» в структуре спиральных галактик [28], не противоречит дальнейшим рассуждениям). Но иногда исследователи в погоне за ложной «красотой» подбирают значения параметров таким образом, что они обнаруживают «золотое сечение» в чистом, так сказать, виде в природе косной. При этом за рамками предварительной обработки статистических данных остается очень важная информация о характере и степени отклонения реальных пропорциональных закономерностей от идеального значения золотого сечения.

Подводя итоги этого раздела, следует сделать методологический вывод о необходимости крайне осторожно проводить аппроксимацию эмпирических данных различными идеальными зависимостями и видами симметрий. Любое, даже незначительное, но стабильно повторяющееся отклонение от идеальных законов, может быть не менее информативно, чем близость к этому закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садовский М.А.* О распределений размеров твердых отдельностей. — ДАН, 1983, 269, I, с. 69–72.
2. *Гуляев А.П.* Металловедение. — М.: Мегаллургия, 1966. — 480 с.
3. *Сухонос С.И.* Принципы масштабной симметрии в оценке естественных систем. С. 90–112. — В сб.: Проблемы анализа биологических систем. — М.: МГУ, 1983.
4. *Альвен X., Аррениус Г.* Эволюция солнечной системы. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
5. *Желудев И.О.* Симметрия я ее приложения. — М.: Атомиздат, 1976. — 286 с.
6. *Яглом И.М.* Проблема тринадцати шаров. — Киев: «Вища школа», 1975. — 84 с.
7. *Сухонос С.И.* Определение понятия системы. — В сб. тезисов докладов: «Кибернетика и проблемы управления научно-техническим и социально-экон. прогрессом». — Волгоград, 1982, с. 17–23.
8. *Сухонос С.И.* Пространственная модель системы данных (СД). — В сб. тезисов докладов: «Основные направления повышения эффективности общественного производства». — Волгоград, 1983, с. 62–65.
9. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
10. *Левитин К.Е.* Геометрическая рапсодия. — М.: Знание, 1976, — 143 с.
11. *Мюллер X.* О практическом значении теории возмущений структурно-информационных пространств. С. 23–28 в сб. тезисов докл.: «Кибернетика и проблемы управления научно-техн. и соц.-экон. прогрессом». — Волгоград, 1982.
12. Справочник по элементарной математике / Под ред. П.Ф. Фильчакова. — Киев: Наукова думка, 1967, с.216–218.
13. *Веннindшер М.* Модели многогранников. — М.: Мир, 1974–237 с.

14. Поверхностная прочность материалов при трении / Под ред. Б.И. Костецкого. — Киев: Техника, 1976, — 292 с.
15. *Копцик Ю.Ф.* Физика металлических пленок. — М.: Атомиздат, 1979. — 264 с.
16. *Шаскольская М.П.* Очерки о свойствах кристаллов. — М.: Наука, 1978. — 192 с.
17. *Зафиратос К.Д.* Структура поверхности ядра. С. 44–55. — В сб.: Физика атомного ядра и плазмы. — М.: Наука, 1974, вып. 10.
18. Справочник химика. Изд. 3-е. — Ленинград: Химия, 1971, т. 1, с. 380–381.
19. *Кропоткин Г.Н.* Эволюция земли. — М.: Наука, 1964. — 327 с.
20. *Урманцев Ю.А.* Симметрия природы и природа симметрии. — М.: Мысль, 1974. — 230 с.
21. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: Наука, 1968. — 191 с.
22. *Шубников А.В.* Симметрия подобия (предварительное сообщение). — Кристаллография, 1960, 5, 4, с. 489–496.
23. *Хесин Я.Е.* Размера ядер и функциональное состояние клеток. — М.: Медицина, 1967. — 376 с.
24. *Численко Л.Л.* О размерной структуре населения пелагиали Мирового океана. — ЖОБ, 1968, 29, 5, с. 529–540.
25. *Численко Л.Л.* Структура таксонов фауны и флоры в связи с размерами организмов. — М.: МГУ, 1981. — 203 с.
26. *Sattler K., Mühlbach J., Pfau P., Recknagel E.* Tetrahedra packing — observation of magic numbers for clusters from antimony-tetramers. Physics letters. 1982, 87 A, N 8, p. 418–420.
27. *Mühlbach J., Sattler K., Pfau P., Recknagel E.* Evidence for magic numbers of free lead-clusters. Physics letters. 1982, 87 A, N 8, p. 415–417.
28. *Olderschath R.L.* Mon. Notes Astron. Soc. South. Afr., 1982, v. 41, H 5–6, p. 42–46.